ISSN 2181-0656

Doi Journal 10.26739/2181-0656

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ

3 ЖИЛД, 1 СОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ТОМ 3, НОМЕР 1

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

VOLUME 3, ISSUE 1

TOSHKENT-2022

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

№1 (2022) DOI http://dx.doi.org/10.26739/2181-0656-2022-1

Контакт редакций журналов. www.tadqiqot.uz
ООО Tadqiqot город Ташкент,
улица Амира Темура пр.1, дом-2.
Web: http://www.tadqiqot.uz/; E-mail: info@tadqiqot.uz
Тел: (+998-94) 404-0000

Editorial staff of the journals of www.tadqiqot.uz
Tadqiqot LLC the city of Tashkent,
Amir Temur Street pr.1, House 2.
Web: http://www.tadqiqot.uz/; E-mail: info@tadqiqot.uz
Phone: (+998-94) 404-0000

МУНДАРИЖА | СОДЕРЖАНИЕ | CONTENT

UDK: 514:13
MSC:53A25, 53B30, 53A35, 53A40

Исмоилов Шерзодбек Шокиржон угли
Базовый докторант математического факультета,
Национальный университет Узбекистана,
E-mail:sh.ismoilov@nuu.uz

СВОЙСТВА ДВОЙСТВЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ В МНОГОМЕРНОМ ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

https://doi.org/10.5281/zenodo.7198959

АННОТАЦИЯ

В многомерном изотропном пространстве определена изотропная сфера, аффинно являющаяся параболоидом вращения. Показан метод сопоставления каждой гиперплоскости, пересекающей изотропную сферу, точке. Она названа двойственным образом плоскости. Определена двойственная поверхность к поверхности, содержащейся внутри изотропной сферы. Изучена связь между полными кривизнами поверхности и ее двойственного образа. Доказано, что двойственный образ двойственной поверхности совпадает с поверхностью.

Ключевые слова: изотропное пространство, Галлиева плоскость, изотропная сфера, первая и вторая квадратичная форма, двойственное отображение, двойственная поверхность, преобразование Лежандра.

Ismoilov Sherzodbek Shokirjon ugli
Basic doctoral student of the Faculty of Mathematics,
National University of Uzbekistan,
E-mail: sh.ismoilov@nuu.uz

PROPERTIES OF A DUAL SURFACE IN A MULTIDIMENSIONAL ISOTROPIC SPACE

ABSTRACT

In the paper, we define an isotropic sphere in a multidimensional isotropic space, which is affine to be a paraboloid of rotation. We show the method that compares a point of the dual image to a plane to any hyperplane intersecting an isotropic sphere. It is determined the dual sphere to the surface contained within an isotropic sphere. It is studied the connection between the total curvatures of the surface and its dual image. We prove that the dual image of the dual surface coincides with the surface.

Key words: an isotropic space, Gallean plane, isotropic sphere, first and second fundamental form, dual map, dual surface, Legendre transformations.

Ismoilov Sherzodbek Shokirjon o'g'li
Matematika fakulteti tayanch doktoranti,
O‘zbekiston Milliy universiteti,
E-mail: sh.ismoilov@nuu.uz

KO‘P O‘LCHALIK IZOTROP FAZOSIDA QO‘SHMA SIRTNING XOSSALARI

ANNOTATSIYA

Bu ishda ko‘p o‘lchovli izotrop fazoda izotrop sfera aniqlandi, bu affin ma’nosida aylanma paraboloid. Izotrop sferani kesuvchi xar bir gipertekislikka nuqtani mos qo‘yish usuli ko‘rsatilgan, va uni gipertekilikning qo‘shma tasviri deb atalgan. Izotrop sferaning ichki sohasida joylashgan sirtga qo‘shma sirt aniqlangan. Sirtning va qo‘shma sirtning to‘la egriliklari o‘rtasidagi bog‘liqlik o‘rganilgan. Qo‘shma sirtning qo‘shma akslantirishdagi o‘brazi sirtni o‘zi bilan mos kelishi isbotlangan.

Kalit so‘zlar: izotrop fazo, Galiley tekisligi, isoztrop sfera, birinchi va ikkinchi kvadratik forma, qo‘shma akslantirish, qo‘shma sirt, Legandr akslantirishi.

Введение. Изотропное пространство появляется как подпространство псевдоевклидова пространства, имеет метрику распадающуюся на две части, её называют вырожденной метрикой.

Распадающаяся метрика в изотропном пространстве определяет два вида сферы, первая называется метрической и вторая изотропной. В работе изучается двойственное отображение относительно изотропной сферы. Сначала дается определение двойственного отображение поверхности и доказываются его свойство. Используя свойство двойственного отображение изучается свойства полной кривизны выпуклой поверхности и его двойственного образа.

Геометрия поверхностей изотропного пространства впервые изучена К.Штрубекером [12]. Интерес к геометрии изотропного пространства возобновился в начале XXI века в связи с классической механикой и квантовой теорией. Работы Э.М.Айдын [4],[5], М.К. Караканлы и Лоне М.С. [9] посвящены восстановлению поверхности с постоянной полной кривизной. Группам движения изотропного пространства посвящена работа H. Sachs [8], и Yoon D.W [11],[13] изучил задачу восстановление в 3-мерного изотропном пространстве.

Пусть Ox_i $(i=1...n+1)$ система координат в аффинном пространстве A_{n+1}. Скалярную произведению векторов $\vec{X}(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ и $\vec{Y}(y_1,y_2,...,y_{n+1})$ определим по формуле

$$(\vec{X},\vec{Y})=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \text{если } \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\neq 0\\ x_{n+1}y_{n+1} & \text{если } \sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0\end{cases} \tag{1}$$

Определение 1. Аффинное пространство A_{n+1}, где скалярное произведение векторов определено по формуле (1) – называется изотропным пространством R^n_{n+1} [6].

Норму вектор в изотропном пространств R^n_{n+1} определяем как корень из скалярного произведения вектора $|\vec{X}|=\sqrt{(\vec{X},\vec{X})}$, и расстояния между точками как норма вектора соединяющего эти точки.

Если $\vec{X}-\vec{Y}=\vec{AB}$, то расстояния между точками A и B вычисляется по формуле

$$d=\begin{cases}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2} & \text{если} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}\neq 0\\ |y_{n+1}-x_{n+1}| & \text{если} \quad x_i=y_i \quad (i=\overline{1..n})\end{cases} \tag{2}$$

Гиперплоскости в $R_{n+1}^{n-i}(i=1..n-2)$ - могут быть двух типов, изотропная R_{n+1}^{n-i} или евклидова R_n .

Гиперплоскости $x_{n+1}=const$ являются евклидовыми пространствами.

Так как изотропное пространство R_{n+1}^{n} - аффинное пространство, то существует аффинное преобразование координат сохраняющее расстояние, определяемой формулой (2). Это преобразование называется движением изотропного пространство R_{n+1}^{n} и задается формулой[5]

$$X'=A\cdot X+B \qquad A=\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 0\\ & & A_E & & ...\\ & & & & 0\\ \hline h_1 & h_2 & ... & h_{n-1} \quad h_n & 1\end{array}\right), \tag{3}$$

где $A_E=(a_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ - матрица движения в евклидовом пространстве R_n , $B^T=(b_1,b_2,...,b_{n+1})$ – вектор параллельного переноса и $(h_1,h_2,...,h_n,1)$ – координаты скольжения.

Если определить сферу в изотропном пространстве, как множество геометрических точек равноудалённых от заданной точки $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,x_{n+1})$, то ее уравнение имеет вид[9]

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2=r^2 . \tag{4}$$

Эту сферу называем метрический сферой.

Теория поверхности и двойственная поверхность

В R_{n+1}^{n} - рассмотрим поверхность, заданную векторным уравнением

$$r(u_1,u_2,...,u_n)=\left(x_i(u_1,u_2,...,u_n)\,|\,(u_1,u_2,...,u_n)\in D\subset R_n,\ i=\overline{1..(n+1)}\right) \tag{5}$$

По аналогии с евклидовым пространством определяется первая квадратичная форма поверхности [5],

$$I=ds^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}du_idu_j \tag{6}$$

где g_{ij} - коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и

$$g_{ij}=(\vec{r'}_{u_i},\vec{r'}_{u_j})=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_i},\frac{\partial x_k}{\partial u_j}\right).$$

Но когда $ds^2=0$, то дополни тельное первая квадратичная форма $ds^2=dx_{n+1}$.

Так как мы в основном рассматриваем поверхности с однозначной проекцией на плоскость $x_{n+1}=0,$ та $ds^2\neq 0$, для всех точек поверхности**.**

Мы рассматриваем поверхности однозначно проектирующаяся на плоскость $x_{n+1}=0$.

Поэтому не рассматривается дополнительная первая квадратичная форма поверхности.

За нормаль к поверхности принижается, единственный ортогональный вектор ко всем касательным векторам поверхности, $\overrightarrow{n_m}(0,0,...,0,1)$ [12].

Тогда вторая квадратичная форма поверхность имеет вид

$$II=\sum_{i,j=1}^{n}D_{ij}du_idu_j \tag{7}$$

Причем $D_{ij} = (r_{u_i u_j}, n) = x_{n+1_{u_i u_j}}$.

Гиперплоскости, параллельные нормальному вектору, являются изотропными гиперплоскостями соответствующей размерности. В частности, двумерные плоскости параллельные нормальному вектору являются двумерной изотропной плоскостью, но его называют [9]- Галиллевой плоскостью. Следовательно, в двумерном нормальном сечении поверхности геометрия Галиллева. Двумерное нормальное сечение поверхности является кривой на галиллевой плоскости.

Кривизна кривой нормального сечения называется нормальной кривизной кривой на поверхности. Нормальная кривизна кривой на поверхности вычисляется по формуле [2]

$$k_n = \frac{II}{I}. \tag{8}$$

В изотропном пространстве R_{n+1}^n определяется вторая сфера, как поверхность (8)-нормальная кривизна по всем направлением постоянна. Такой поверхностью является поверхность заданная уравнением

$$2x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{9}$$

Определение 2. Поверхность заданная уравнением (9)- называем изотропной сферой в R_{n+1}^n ([2], стр-123).

Для решение рассматриваемых задач нам будет удобно определить нормаль поверхности по формуле

$$\vec{n} = \frac{[\overrightarrow{r_{u_1}}, \overrightarrow{r_{u_2}}, \dots, \overrightarrow{r_{u_n}}]}{\left|[\overrightarrow{r_{u_1}}, \overrightarrow{r_{u_2}}, \dots, \overrightarrow{r_{u_n}}]\right|},$$

где $[\overrightarrow{r_{u_1}}, \overrightarrow{r_{u_2}}, \dots, \overrightarrow{r_{u_n}}]$ - векторное произведение вектор определяемое формула

$$[\overrightarrow{r_{u_1}}, \overrightarrow{r_{u_2}}, \dots, \overrightarrow{r_{u_n}}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \dots & \overrightarrow{e_{n+1}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u_n} \end{vmatrix}.$$

Относительно этой нормали определим вторую квадратичную форму и полную кривизну поверхности [5].

Основные результаты

Пусть n-мерная плоскость пространства R_{n+1}^n, не параллельная оси Ox_{n+1} задана уравнением

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i + C \tag{10}$$

Обозначим через Γ – сечение изотропной сферы с плоскостью (10).

Множество касательных n – мерных плоскостей изотропной сферы в точках сечения Γ, обозначаем через $\{\pi\}$.

Лемма 1. Сечение Γ – изотропной сферы с плоскостью (10)- является $(n-1)$ – мерным эллипсоидом.

Доказательство. Координаты точек множества Γ – должны удовлетворят системе уравнений

$$\begin{cases} 2x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \\ x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i + C \end{cases}$$

Отсюда $2\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + 2C = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}$ или

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - A_i)^2 = \sum_{j=1}^{n} A_j^2 - 2C \qquad (11)$$

Если ввести обозначение $r = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} A_j^2 - 2C}$, то уравнение (11) – задает метрическую сферу на $n-$мерной плоскости $x_{n+1} = 0$.

В пространстве R_{n+1}^n (11)-является цилиндром с одномерной образующей и направляющей на плоскости $x_{n+1} = 0$ $(n-1)-$сферой. Так как этот цилиндр одновременно пересекается с изотропной сферой и гиперплоскостью (10), сечение аффинно является эллипсоидом. Лемма доказана.

Теорема 1. Все касательные плоскости изотропной сферы в точках множество $\Gamma-$ пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Отметим произвольные $(n+1)-$ точки $M_i(x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i, x_{n+1}^i) \in \Gamma \quad \{ i = 1..(n+1)\}$.

Составим уравнения касательных плоскостей изотропной сферы в точках M_i .

$$-x_1^1(x_1 - x_1^1) - x_2^1(x_2 - x_2^1) - ... - x_n^1(x_n - x_n^1) + x_{n+1} - x_{n+1}^1 = 0$$
$$-x_1^2(x_1 - x_1^2) - x_2^2(x_2 - x_2^2) - ... - x_n^2(x_n - x_n^2) + x_{n+1} - x_{n+1}^2 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-x_1^n(x_1 - x_1^n) - x_2^n(x_2 - x_2^n) - ... - x_n^n(x_n - x_n^n) + x_{n+1} - x_{n+1}^n = 0$$
$$-x_1^{n+1}(x_1 - x_1^{n+1}) - x_2^{n+1}(x_2 - x_2^{n+1}) - ... - x_n^{n+1}(x_n - x_n^{n+1}) + x_{n+1} - x_{n+1}^{n+1} = 0$$

Тогда пересечение этих плоскостей, то есть решения этой системы имеет вид

$$\begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{\begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_2^1 & ... & x_n^1 & 1 \\ x_{n+1}^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{n+1}^n & x_2^n & ... & x_n^n & 1 \\ x_{n+1}^{n+1} & x_2^{n+1} & ... & x_n^{n+1} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \xi_2 = -\dfrac{\begin{vmatrix} x_1^1 & x_{n+1}^1 & ... & x_n^1 & 1 \\ x_1^2 & x_{n+1}^2 & ... & x_n^2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_1^n & x_{n+1}^n & ... & x_n^n & 1 \\ x_1^{n+1} & x_{n+1}^{n+1} & ... & x_n^{n+1} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}, \; .... \;, \; \xi_n = -\dfrac{\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & ... & x_{n+1}^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & x_{n+1}^2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_1^n & x_2^n & ... & x_{n+1}^n & 1 \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & ... & x_{n+1}^{n+1} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \\ \xi_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \xi_i - x_{n+1}^1. \end{cases}$$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & ... & x_n^1 & 1 \\ x_1^2 & ... & x_n^2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1^{n+1} & ... & x_n^{n+1} & 1 \end{vmatrix}$.

Теперь берем произвольную точку $M_{n+2}(x_1^{n+2}, x_2^{n+2}, ..., x_n^{n+2}, x_{n+1}^{n+2}) \in \Gamma$, причём она не должна совпадать ни с одной точкой M_i $i = \overline{1..n+1}$. Составим уравнения касательной плоскости изотропной сферу в точке M_{n+2}

$$-x_1^{n+2}(x_1 - x_1^{n+2}) - x_2^{n+2}(x_2 - x_2^{n+2}) - ... - x_n^{n+2}(x_n - x_n^{n+2}) + x_{n+1} - x_{n+1}^{n+2} = 0. \tag{12}$$

Докажем, что точка $\Pi(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, \xi_{n+1})$ принадлежит этой касательной плоскости, можно сказать, что и эта касательная плоскость проходит через точки пересечении предыдущих касательных плоскостей.

Составим уравнение гиперплоскости проходящей через точки M_i. Так как $i = \overline{1..n+1}$ эта плоскость будет единственным и ее уравнения задается формулой

$$x_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2^1 & ... & x_n^1 & x_{n+1}^1 \\ 1 & x_2^2 & ... & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_2^n & ... & x_n^n & x_{n+1}^n \\ 1 & x_2^{n+1} & ... & x_n^{n+1} & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} x_1^1 & 1 & ... & x_n^1 & x_{n+1}^1 \\ x_1^2 & 1 & ... & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_1^n & 1 & ... & x_n^n & x_{n+1}^n \\ x_1^{n+1} & 1 & ... & x_n^{n+1} & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} + ... +$$

$$+ x_n \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & ... & 1 & x_{n+1}^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & 1 & x_{n+1}^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_1^n & x_2^n & ... & 1 & x_{n+1}^n \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & ... & 1 & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} + x_{n+1}\Delta - \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & ... & x_n^1 & x_{n+1}^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_1^n & x_2^n & ... & x_n^n & x_{n+1}^n \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & ... & x_n^{n+1} & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

Уравнения решаем относительно переменной x_{n+1}, это возможно, так как, мы рассматриваем гиперплоскости не параллельные оси Ox_{n+1}.

$$x_{n+1} = \frac{x_1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_2^1 & ... & x_n^1 & 1 \\ x_{n+1}^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{n+1}^n & x_2^n & ... & x_n^n & 1 \\ x_{n+1}^{n+1} & x_2^{n+1} & ... & x_n^{n+1} & 1 \end{vmatrix} + \frac{x_2}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_{n+1}^1 & ... & x_n^1 & 1 \\ x_1^2 & x_{n+1}^2 & ... & x_n^2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_1^n & x_{n+1}^n & ... & x_n^n & 1 \\ x_1^{n+1} & x_{n+1}^{n+1} & ... & x_n^{n+1} & 1 \end{vmatrix} + ... +$$

$$+ \frac{x_n}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & ... & x_{n+1}^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & x_{n+1}^2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_1^n & x_2^n & ... & x_{n+1}^n & 1 \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & ... & x_{n+1}^{n+1} & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & ... & x_n^1 & x_{n+1}^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_1^n & x_2^n & ... & x_n^n & x_{n+1}^n \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & ... & x_n^{n+1} & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix}$$

В этих уравнениях коэффициенты при переменных x_i обозначим A_i, а свободней член через C. Тогда уравнение имеет вид

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i + C \tag{13}$$

Причем $A_i = \xi_i$ $(i = 1..n)$ и $C = -\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^1 \xi_j - x_{n+1}^1 \right)$.

Из этих равенств следует $x_{n+1}^{n+2} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i^{n+2} - \xi_{n+1}$.

Теперь докажем, что координаты точки $\Pi(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, \xi_{n+1})$ удовлетворяют уравнению (12).

$$-x_1^{n+2}(\xi_1 - x_1^{n+2}) - x_2^{n+2}(\xi_2 - x_2^{n+2}) - \ldots - x_n^{n+2}(\xi_n - x_n^{n+2}) + \xi_{n+1} - x_{n+1}^{n+2} =$$

$$= -x_1^{n+2}\xi_1 - x_2^{n+2}\xi_2 - \ldots - x_n^{n+2}\xi_n + \xi_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} - x_{n+1}^{n+2} =$$

$$= -x_1^{n+2}\xi_1 - x_2^{n+2}\xi_2 - \ldots - x_n^{n+2}\xi_n + \xi_{n+1} + x_{n+1}^{n+2} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i^{n+2} + \xi_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i^{n+2} - \xi_{n+1} = 0$$

Так как координаты точи $\Pi(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, \xi_{n+1})$ удовлетворяют уравнению касательной плоскости изотропной сферы в точке M_{n+2}. Точке M_{n+2} мы взяли произвольно, следовательно, можем делать вывод, что все касательные к изотропной сфере в точках множества Γ пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

В теореме 1 доказывали, что все касательные плоскости изотропной сферы пересекаются в одной точке с координатами $(A_1, A_2, ..., A_n, -C)$.

Если плоскость пересекающая изотропную сферу, сечением которого образуется множество Γ задана уравнением (13), то касательные плоскости к изотропной сфере в точках множество Γ пересекаются в одной точке с координатами $(A_1, A_2, ..., A_n, -C)$.

Определение 3. Точку $(A_1, A_2, ..., A_n, -C)$ назовём двойственной точкой плоскости (13), относительно изотропной сфере.

Пусть в R_{n+1}^n задана поверхность F с уравнением

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{14}$$

Обозначим через L поверхность уравня $x_{n+1} = H$ $(H = const)$ поверхности F. Рассматриваем класс выпуклых поверхностей $\{H\}$ у которых поверхность уровня $f(x_1, x_2, ..., x_n) = H$ и пересечение гиперплоскости $x_{n+1} = H$ со изотропной сферой является одной кривой Γ .

Причем поверхности класса $\{H\}$-содержатся внутренней области изотропной сферы, и однозначного проектируется в область D на плоскость $x_{n+1} = 0$.

Проведем опорную плоскость π_0 в точке $X_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0,)$ к поверхности $F \in \{H\}$.

Так как F содержится внутри изотропной сферы, то касательная плоскость пересекается с изотропной сферой. Естественно касательная плоскость π_0 имеет двойственную точку X_0^*.

Лемма 2. Если поверхность (14) регулярная, то двойственная точка касательной плоскости имеет координаты

$$\{f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_n}, \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f'_{x_i} - f\}. \tag{15}$$

Действительно уравнение касательной плоскости поверхности в точке X_0, определяется формулой

$$f'_{x_1}\left(x_1 - x_1^0\right) + f'_{x_2}\left(x_2 - x_2^0\right) + \ldots + f'_{x_n}\left(x_n - x_n^0\right) - \left(x_{n+1} - x_{n+1}^o\right) = 0.$$

Решеная его относительно x_{n+1} получаем

$$x_{n+1} = x_z f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \ldots + x_n f'_{x_n} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f'_{x_i} - f\right) \tag{16}$$

Коэффициенты этого уравнения дает координаты сопряжённой точки. Лемма доказана.

Надо заметим, что двойственное соответствие не однозначно. Когда поверхность F не регулярна, двойственная образ точки не всегда однозначно. Когда поверхность F - многогранник и точка X_0 принадлежит внутренней части грани ее образ является точкой.

Если X_0 -точка одномерного ребра, то ее двойственная образ является $(n-1)-$мерной поверхностью. Если X_0 точки $k-$мерного ребра, то ее двойственная образ является $(n-k)-$ мерной поверхностью. Причем для вершины многогранника, множество двойственных точки образует $n-$ мерную поверхность.

В общем случае, когда точка $X_0 \in F$ изменяется по поверхности, двойственные точки к опорным плоскостям образуют некоторое множество F^*.

Определение 4. Множество F^* -назовём двойственной поверхностью к поверхности F - относительно изотропной сферы.

Лемма 3. Если поверхности F - регулярна, то F^* -является поверхностью и задается уравнением

$$\begin{cases} x_i^*(u,v) = \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \qquad i = 1...n \\ x_{n+1}^*(u,v) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} - f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{17}$$

Справедливость леммы 2 следует из леммы 1.

Теореме 2. Если поверхность $F \in \{H\}$, то поверхность F^* -также является выпуклой поверхностью однозначно проектирующая в область $D^* \subset D$.

Эта теорема доказана в трехмерном случае в работе [1]. Также подходит для многомерного пространства и не отличается доказательством.

Если рассмотрим связку плоскостей проходящей через внутреннюю точку $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, x_{n+1}^0)$ изотропной сферы, то двойственные образы этих плоскостей образуют плоскость, заданной уравнением $x_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0 x_i - x_{n+1}^0$.

Так как изотропное пространство самодвойственно[2], существует проективная двойственность. Можно определять двойственную отображению поверхности из внешней части сферы к внутреннему. При этом плоскости не пересекающая изотропную сферу, сопоставляется точка внутренний части изотропной сферы.

Если $F \in \{H\}$ и F^* -существует, то справедлива следующая теорема.

Теореме 3. Двойственный образ поверхности F^* совпадает с поверхностью F, то есть $F^{**} = F$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 4. Справедливо следующее равенство

$$\begin{vmatrix} f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} x_j f_{x_1x_j} \\ f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} x_j f_{x_2x_j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} x_j f_{x_nx_j} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} x_1 K \tag{18}$$

Где K -полная кривизна поверхности F определяемая формулой[5]

$$K = \det(f_{x_ix_j})_{\substack{i=1.n \\ j=1.n}} \tag{19}$$

и $f_{x_ix_j} = \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Доказательство леммы 4. Разложим определитель по элементам последнего столбца.

$$\begin{vmatrix} f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \dots & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_1x_j} \\ f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \dots & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_2x_j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \dots & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_nx_j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \dots & x_1 f_{x_1x_1} \\ f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \dots & x_1 f_{x_2x_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \dots & x_1 f_{x_nx_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \dots & x_2 f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \dots & x_2 f_{x_2x_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \dots & x_2 f_{x_nx_2} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \dots & x_n f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \dots & x_n f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \dots & x_n f_{x_nx_n} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \dots & f_{x_1x_1} \\ f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \dots & f_{x_2x_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \dots & f_{x_nx_1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} x_1 K$$

Все определители кроме первого обращаются в нуль и первое дает формулу полной кривизны.

Доказательство теоремы 3. С начали определим уравнение касательной гиперплоскости поверхности F^* в точке $P^*(x_{1,0}^*, x_{2,0}^*, x_{3,0}^*, ..., x_{n,0}^*, x_{n+1,0}^*)$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{i_2} & \dots & \vec{i_n} & \overrightarrow{i_{n+1}} \\ f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \dots & f_{x_1x_n} & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_1x_j} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \dots & f_{x_2x_n} & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_2x_j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \dots & f_{x_nx_n} & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_nx_j} \end{vmatrix} = (-1)^2 \vec{i_1} \begin{vmatrix} f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \dots & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_1x_j} \\ f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \dots & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_2x_j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \dots & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_nx_j} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+(-1)^{n+1} \vec{i_n} \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \dots & f_{x_1x_{n-1}} & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_1x_j} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \dots & f_{x_2x_{n-1}} & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_2x_j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \dots & f_{x_nx_{n-1}} & \sum_{j=1}^{n} x_j f_{x_nx_j} \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} \overrightarrow{i_{n+1}} \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \dots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \dots & f_{x_1x_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \dots & f_{x_nx_n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} x_1 K \vec{i_1} + (-1)^{n+1} x_2 K \vec{i_2} - \dots + (-1)^{n+1} x_n K \vec{i_n} + (-1)^{n+2} K \overrightarrow{i_{n+1}}$$

касательная гиперплоскость

$$-x_{1,0} K(x_1^* - x_{1,0}^*) - x_{2,0} K(x_2^* - x_{2,0}^*) - \dots - x_{n,0} K(x_n^* - x_{n,0}^*) + K(x_{n+1}^* - x_{n+1,0}^*) = 0$$

$$-x_{1,0}(x_1^* - x_{1,0}^*) - x_{2,0}(x_2^* - x_{2,0}^*) - \dots - x_{n,0}(x_n^* - x_{n,0}^*) + (x_{n+1}^* - x_{n+1,0}^*) = 0$$

$$-x_{1,0}(x_1^* - f_{x_{1,0}}) - x_{2,0}(x_2^* - f_{x_{2,0}}) - \dots - x_{n,0}(x_n^* - f_{x_{n,0}}) + (x_{n+1}^* - (\sum_{j=1}^{n} x_{j,0} f_{x_{j,0}} - f)) = 0$$

После не сложных преобразований получим уравнение касательной гиперплоскости.

$$x_{n+1}^* = \sum_{j=1}^{n} x_{j,0} x_j^* - f \tag{20}$$

Следовательно, двойственной образ этой плоскости, относительно изотропной сферы имеет координаты $P^{**}\left(x_{1,0}, x_{2,0}, ..., x_{n,0}, f\right)$. Принадлежность его к поверхности F очевидно. Так как точка P^* произвольная точка поверхности F^*. Когда она меняется на поверхности её двойственная образ образует поверхность F.

Пусть в R_{n+1}^n поверхность F задана уравнением $x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ из класса $C^3\left(D\right)$ и K – ее полная кривизна отлична от нуля .Обозначим через K^* полную кривизну двойственной поверхности F^* к поверхности F - относительно изотропной сферы.

Теорема 4. Полная кривизна K^* - обратно пропорциональна к полной кривизне K, то есть $K^* = \dfrac{1}{K}$.

Доказательство.

Полную кривизну поверхности F^* из R_{n+1}^n вычислим по формуле[5] $K^* = \dfrac{\det(D_{ij}^*)_{\substack{i=\overline{1.n}\\ j=\overline{1.n}}}}{\det(g_{ij}^*)_{\substack{i=\overline{1.n}\\ j=\overline{1.n}}}}$.

Здес $g_{ij}^* = \sum\limits_{k=1}^n f_{x_k x_i} f_{x_k x_j}$ и $D_{ij}^* = \dfrac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\begin{vmatrix} f_{x_1 x_i x_j} & f_{x_2 x_i x_j} & \dots & f_{x_n x_i x_j} & \sum\limits_{k=1}^n x_k f_{x_k x_i x_j} + f_{x_i x_j} \\ f_{x_1 x_1} & f_{x_2 x_1} & \dots & f_{x_n x_1} & \sum\limits_{k=1}^n x_k f_{x_k x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_1 x_n} & f_{x_2 x_n} & \dots & f_{x_n x_n} & \sum\limits_{k=1}^n x_k f_{x_k x_n} \end{vmatrix}$.

Для удобство с начало вычислим определители

$$\det(g_{ij}^*) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k_1=1}^n f_{x_{k_1} x_1}^2 & \sum\limits_{k_2=1}^n f_{x_{k_2} x_1} f_{x_{k_2} x_2} & \dots & \sum\limits_{k_n=1}^n f_{x_{k_n} x_1} f_{x_{k_n} x_n} \\ \sum\limits_{k_1=1}^n f_{x_{k_1} x_2} f_{x_{k_1} x_1} & \sum\limits_{k_2=1}^n f_{x_{k_2} x_2}^2 & \dots & \sum\limits_{k_n=1}^n f_{x_{k_n} x_2} f_{x_{k_n} x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k_1=1}^n f_{x_{k_1} x_n} f_{x_{k_1} x_1} & \sum\limits_{k_2=1}^n f_{x_{k_2} x_n} f_{x_{k_2} x_2} & \dots & \sum\limits_{k_n=1}^n f_{x_{k_n} x_n}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k_1=1}^n (-1)^{k_1+1} f_{x_{k_1} x_1} \begin{vmatrix} f_{x_{k_1} x_1} & \sum\limits_{k_2=1}^n f_{x_{k_2} x_1} f_{x_{k_2} x_2} & \dots & \sum\limits_{k_n=1}^n f_{x_{k_n} x_1} f_{x_{k_n} x_n} \\ f_{x_{k_1} x_2} & \sum\limits_{k_2=1}^n f_{x_{k_2} x_2}^2 & \dots & \sum\limits_{k_n=1}^n f_{x_{k_n} x_2} f_{x_{k_n} x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_{k_1} x_n} & \sum\limits_{k_2=1}^n f_{x_{k_2} x_n} f_{x_{k_2} x_2} & \dots & \sum\limits_{k_n=1}^n f_{x_{k_n} x_n}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^n (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_n+1+2+\dots+n} f_{x_{k_1} x_1} f_{x_{k_2} x_2} \cdots f_{x_{k_n} x_n} \begin{vmatrix} f_{x_{k_1} x_1} & f_{x_{k_2} x_1} & \dots & f_{x_{k_n} x_1} \\ f_{x_{k_1} x_2} & f_{x_{k_2} x_2} & \dots & f_{x_{k_n} x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_{k_1} x_n} & f_{x_2 x_3} & \dots & f_{x_{k_n} x_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{n} (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_n+1+2+\ldots+n} f_{x_{k_1}x_1} f_{x_{k_2}x_2} \cdots f_{x_{k_n}x_n} (-1)^{N(k_1,k_2,\ldots,k_n)} \begin{vmatrix} f_{x_{k_1}x_1} & f_{x_{k_2}x_1} & \ldots & f_{x_{k_n}x_1} \\ f_{x_{k_1}x_2} & f_{x_{k_2}x_2} & \ldots & f_{x_{k_n}x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{x_{k_1}x_n} & f_{x_2x_3} & \ldots & f_{x_{k_n}x_n} \end{vmatrix} = K^2$$

где $N(k_1,k_2,...,k_n)$ -число перестановок в возрастающего порядка. Значит $\det(g_{ij}^*) = K^2$.

Теперь преобразуем коэффициенты второй квадратичной формы.

$$D_{ij}^* = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \begin{vmatrix} f_{x_1x_ix_j} & f_{x_2x_ix_j} & \ldots & f_{x_nx_ix_j} & \sum_{k=1}^{n} x_k f_{x_kx_ix_j} + f_{x_ix_j} \\ f_{x_1x_1} & f_{x_2x_1} & \ldots & f_{x_nx_1} & \sum_{k=1}^{n} x_k f_{x_kx_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{x_1x_n} & f_{x_2x_n} & \ldots & f_{x_nx_n} & \sum_{k=1}^{n} x_k f_{x_kx_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{K}\left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{1+p} f_{x_px_ix_j} \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & \ldots & f_{x_1x_{p-1}} & f_{x_1x_{p+1}} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} x_k f_{x_kx_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ f_{x_1x_n} & \ldots & f_{x_{p-1}x_n} & f_{x_nx_n} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} x_k f_{x_kx_1} \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_{x_kx_ix_j} + f_{x_ix_j} \right) K \right) =$$

$$= \frac{1}{K}\left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{1+p} f_{x_px_ix_j} \left((-1)^{n-p} x_p K \right) + (-1)^{n+2} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_{x_kx_ix_j} + f_{x_ix_j} \right) K \right) =$$

$$= \frac{1}{K}\left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{n+1} x_p f_{x_px_ix_j} K + (-1)^{n+2} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_{x_kx_ix_j} + f_{x_ix_j} \right) K \right) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{n+1} x_p f_{x_px_ix_j} + (-1)^{n+2} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_{x_kx_ix_j} + f_{x_ix_j} \right) = (-1)^{n+2} f_{x_ix_j}$$

Используя эти коэффициенты, и вынеся знак определяемый выражением $(-1)^{n+2}$, получаем

$$K^* = \frac{\left((-1)^{n+2} \right)^{n+1} K}{K^2} = \frac{1}{K}$$

Теорема доказана.

Заключение.

В физике и механике широко используется отображение Лежандра [14]. Определенная нами двойственное отображение поверхности изотропного пространства, при использовании метода наложенного пространства, то есть рассмотренная в евклидовом пространстве, она совпадает с преобразованием Лежандра. Отсюда можно делать вывод: исследованная нами теория поверхности выражает геометрический смысл преобразования Лежандра.

Используя преобразования Лежандра некоторые задачи связанные с операторам Лагранжа $L(\dot{x},x)$ переводятся к изучению задачи связанную с оператором Гамильтона $H(p,x)$

$$H(p,x) = p\dot{x} - L(\dot{x},x) \quad p = \frac{\partial L(\dot{x},x)}{\partial \dot{x}}.$$

Надеемся, что теория поверхности изотропного пространства дает геометрическую интерпретацию вышеуказанных задач.

Литература

1. Artykbaev A., Ismoilov Sh. Sh. The dual surfaces of an isotropic space R_3^2, Bull. Inst. Math., 2021, Vol-4, Issue-4, pp. 1-8.
2. Артыкбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в пространстве время. Ташкент, Фан, 1991, 120-127 с.
3. Artykbaev A, Ismoilov Sh., Special mean and total curvature of a dual surface in isotropic spaces, International electronic journal of geometry, 2022, volume 15, Issue 1, pp. 1–10.
4. Aydin M.E., Kara A.E, and Ergüt V.,Affine factorable surfaces in isotropic spaces, TWMS J. Pure Appl. Math., Vol-11, N-1, 2020, pp.72-88
5. Aydin M. E., Ogrenmis A.O., Translation hypersurfaces with constant curvature in 4-dimensional isotropic space, International Journal of Maps in Mathematics, Vol-2, Issue 1, 2019, pp. 108-130.
6. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии, Москва Наука, 1969, 547 с.
7. Бухтяк М. С., Линии на параболоиде, близкие к геодезическим, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2015, номер 6(38), 5–17 с.
8. Hans Sachs, Isotrop Geometri des Raumes, (1990) -300 c.
9. Ismoilov Sh. Sh., Sultonov B.M., Cyclic surfaces in pseudo-euclidean space. International Journal of Statistics and Applied Mathematics 2020; 3: pp. 28-31.
10. Lone M.S., Karacan M.K.,Dual translation surfaces in the three dimensional simply isotropic space, Tamkang journal ofmathematics Volume 49, Number 1, 67-77, March 2018
11. Karacan M. K., Yoon D. W. and Bukcu B., Translation surfaces in the three-dimensional simply isotropic space, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 13(7) (2016) http://dx.doi.org/10.1142/S0219887816500882
12. Strubecker K., Differentialgeometrie des isotropen Raumes I,II III,; Math.Z. vol-47(1942) 743-777; vol-48(1942), 369-427; vol-48(1943) 369-427.
13. Yoon D.W., Lee J.W., Linear Weingarten helicoidally surfaces in isotropic space. Symmerty 2016, 8(11): 1-7, https://doi.org/10.3390/sym8110126
14. Zia, R. K. P.; Redish, Edward F.; McKay, Susan R. Making sense of the Legendre transform. , American Journal of Physics 77, 614-622 (2009), https://doi.org/10.1119/1.3119512
15. Ismoilov Sh.Sh., Geometry of the Monge - Ampere equation in an isotropic space, Uzbek Mathematical Journal, vol-66, issue-2, (2022), pp. 66-77, DOI: 10.29229/uzmj.2022-2-7
16. Artykbaev A, Ismoilov Sh., Surface recovering by a give total and mean curvature in isotropic space R, Palestine Journal of Mathematics, vol-11(3), (2022), pp. 351-361.

ISSN 2181-0656

Doi Journal 10.26739/2181-0656

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ

3 ЖИЛД, 1 СОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ТОМ 3, НОМЕР 1

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

VOLUME 3, ISSUE 1

Контакт редакций журналов. www.tadqiqot.uz
ООО Tadqiqot город Ташкент,
улица Амира Темура пр.1, дом-2.
Web: http://www.tadqiqot.uz/; E-mail: info@tadqiqot.uz
Тел: (+998-94) 404-0000

Editorial staff of the journals of www.tadqiqot.uz
Tadqiqot LLC The city of Tashkent,
Amir Temur Street pr.1, House 2.
Web: http://www.tadqiqot.uz/; E-mail: info@tadqiqot.uz
Phone: (+998-94) 404-0000