ISSN 2782-4365

Моя профессиональная карьера

Научно-образовательный электронный журнал

ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ

Выпуск №46-1
(январь, 2024)

Международный научно-образовательный
электронный журнал
«ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ»

ISSN 2782-4365
УДК 37
ББК 94

Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №46-1 (январь, 2024). Дата выхода в свет: 08.01.2024.

Сборник содержит научные статьи отечественных и зарубежных авторов по экономическим, техническим, философским, юридическим и другим наукам.

Миссия научно-образовательного электронного журнала «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ» состоит в поддержке интереса читателей к оригинальным исследованиям и инновационным подходам в различных тематических направлениях, которые способствуют распространению лучшей отечественной и зарубежной практики в интернет пространстве.

Целевая аудитория журнала охватывает работников сферы образования (воспитателей, педагогов, учителей, руководителей кружков) и школьников, интересующихся вопросами, освещаемыми в журнале.

Материалы публикуются в авторской редакции. За соблюдение законов об интеллектуальной собственности и за содержание статей ответственность несут авторы статей. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов статей. При использовании и заимствовании материалов ссылка на издание обязательна.

МЕТОД ФЕЙГЕНБАУМ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ ОТРАЖЕНИЯ

Х.И. Хатамов – Учитель физики академического лицея Ферганского филиала Ташкентского университета информационных технологий.

И.М. Усмонов – Учитель физики академического лицея Ферганского филиала Ташкентского университета информационных технологий.

Митчел Фейгенбаум, в честь которого был назван сценарий, описанный выше, заметил интересную особенность логистического отображения. Оказалось, критические значения параметра r, которые принято записывать как r_k, образуют последовательность, которая стремится к некоторому значению r_∞ Приведем несколько первых критических значений:

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	…	r_∞
3,0	3,449949 …	3,54409 …	3,568759 …	3,569692	…	3,5699457

Оказалось, что последовательность r_k подчиняется следующему соотношению:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{r_k-r_{k-1}}{r_{k+1}-r_k}=\delta=4{,}669209\ldots \qquad (1)$$

Константа δ характеризует скорость сходимости критических значений r_k к пределу r_∞. Константа δ называется *универсальной постоянной Фейгенбаума*. Как показали исследования, величина δ не зависит от конкретного вида отображения, главное, чтобы оно было унимодальным (имело один экстремум).

Получается, что любое отображение, испытывающее каскад бифуркаций удвоения периода, переходит к хаосу с одинаковой скоростью.

На этом интересные свойства логистического отображения не заканчиваются. Определим на бифуркационной диаграмме расстояния относительно $x = 0{,}5$ между подобными ветвями диаграммы и обозначим расстояния как d_k, как это показано на Рис. 1. Этот процесс называют *дроблением масштабов*. Полученные значения d_k образуют последовательность, которая обладает следующим свойством:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{d_k}{d_{k+1}} = \alpha = -2502907\ldots \qquad (2)$$

Постоянная α называется *универсальным масштабным множителем*. Помимо хаотических траекторий, логистическое отображение имеет в области параметра $r > r_\infty$ множество периодических траекторий. Среди них можно найти траектории с периодом 3, 5 или 7 . Это подтверждает *теорему Ли и Йорке*, известную под названием «период три рождает хаос», которая говорит, что, если в системе существует цикл периода 3, то в ней имеется и набор начальных условий, который приводит к хаотической динамике.

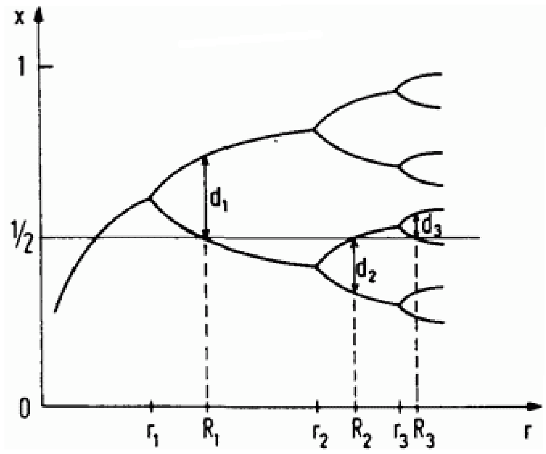

Рис. 1. Иллюстрация процесса дробления масштабов.

Одномерные отображения реализующие циклы с периодом три имеют также циклы с любым другим числом периодов. Об этом гласит *теорема Шарковского.* Её более точная формулировка такая: если непрерывное отображение одномерного интервала в себя имеет цикл периода n, то оно имеет также и циклы со все-возможными периодамиm, которые находятся справа от n в ряду:

$$3,5,7,9,\ldots,2\cdot 3,2\cdot 5,2\cdot 7,2\cdot 9\cdot,\ldots,2^2\cdot 3,2^2\cdot 5,2^2\cdot 7,2^2\cdot 9,\ldots 2^3\cdot 3,2^3\cdot 5,2^3\cdot 7,2^3\cdot 9,2^4\cdot 3,2^4\cdot 5,2^4\cdot 9,\ldots,2^3\cdot 2^2\cdot 2^1\cdot 1$$

Приведенный ряд натуральных чисел называется *порядком Шарковского* и представляет собой упорядоченный натуральный ряд.

На Рис. 2 можно убедиться в том, что в бифуркационной диаграмме логистического отображения возникают так называемые «окна периодичности» в области параметра $r > r_\infty$. На рисунке выделены значения параметра, при котором можно наблюдать соответствующие периоды.

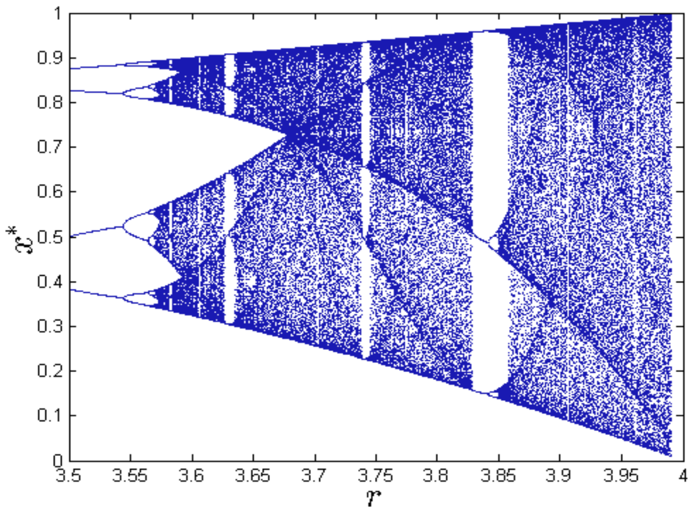

Рис. 2 Возникновение «окон периодичности» в бифуркационной диаграмме. Красным выделены окна соответствующие циклам периода 6, 5 и 3.

Очень эффективным способом оценки «хаотичности» является рассмотрение такой величины как *показатель Ляпунова*. Это показатель, который определяет меру расходимости траектории, т.е. характер изменения траектории в зависимости от изменения начального условия.

Система называется *устойчивой по Ляпунову*, если две траектории, стартовавшие из близких начальных точек, остаются близкими в любой последующий момент времени. Далее мы опишем это условие математически.

Динамическая система, как уже упоминалось выше, может быть задана обыкновенным дифференциальным уравнением вида (см. подробно в Ч.2)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x}) \qquad (2)$$

Рассмотрим одномерный случай. В этом случае уравнение (2) запишется как:

$$\dot{x} = F(x)\ . \qquad (3)$$

Пусть $x_0(t)$ – это некоторое решение уравнения (3), а $y(t)$ – это отклонение от начальной траектории, реализующееся в результате выбора другого начального условия. В результате получаем, что $x(t) = x_0(t) + y(t)$. Подставим $x(t)$ в формулу (3), и разложим правую часть в ряд:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = F(x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_0} \cdot y + \cdots \qquad (4)$$

Ограничиваясь линейным приближением, получаем

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_0} y \qquad (5)$$

Решение уравнения (4) запишется следующим образом: $y = y(0) \cdot e^{\Lambda t}$,
где $y(0)$ – начальное смещение.

Получаем, что при $\Lambda > 0$ траектория $x(t)$ будет экспоненциально расходиться с траекторией $x_0(t)$. Если же $\Lambda < 0$, то напротив траектории будут со временем сближаться. Показатель степени экспоненты Λ называется *показателем Ляпунова* и определяется как:

$$\Lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \ln \left|\frac{y(t)}{y(0)}\right| \qquad (6)$$

Обобщая данный результат на случай многомерного фазового пространства и вводя $\vec{y} = (0)$ – вектор начального смещения, можно записать следующее:

$$\Lambda(\vec{y}(0)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \ln \left|\frac{y(t)}{y(0)}\right| \qquad (7)$$

При всех возможных поворотах вектора $\vec{y}(0)$ в (6) $\Lambda(\vec{y}(0))$ будет давать набор дискретных значений. Причем количество возможных значений будет соответствовать размерности фазового пространства. Набор чисел $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots \Lambda_N\}$ называют *спектром ляпуновских показателей.* Очевидно, что, если в наборе присутствует хотя бы один положительный показатель, то система по данному направлению фазового пространства неустойчива. Если все показатели отрицательны, то система устойчива. Равенство нулю показателя Ляпунова обычно свидетельствует о недостаточности линейного анализа устойчивости.

Показатели Ляпунова чрезвычайно полезны при описании различных динамических систем, и возможности использования этого подхода весьма широки.

Для одномерных отображений формулу (5) после математических упрощений можно записать в виде:

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_i^n \ln|f'(x_i)|. \qquad (8)$$

Для расчета показателя Ляпунова для одномерного отображения можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Вычисляется последовательность x_n, для какого-то начального значения . Рекомендуется выбирать достаточно большое n, т.к. в формуле (2) предполагается, что n стремится к бесконечности.

2. Далее, берется производная от функции отображения f и точки из набора x_n отображается в другой набор x'_n, по правилу $x'_n = f'(x_n)$.

3. Производится суммирование по всем прологарифмированным членам полученной последовательности, и полученная сумма делится на n.

На Рис. 3. построена зависимость показателя Ляпунова для логистического отображения от управляющего параметра r.

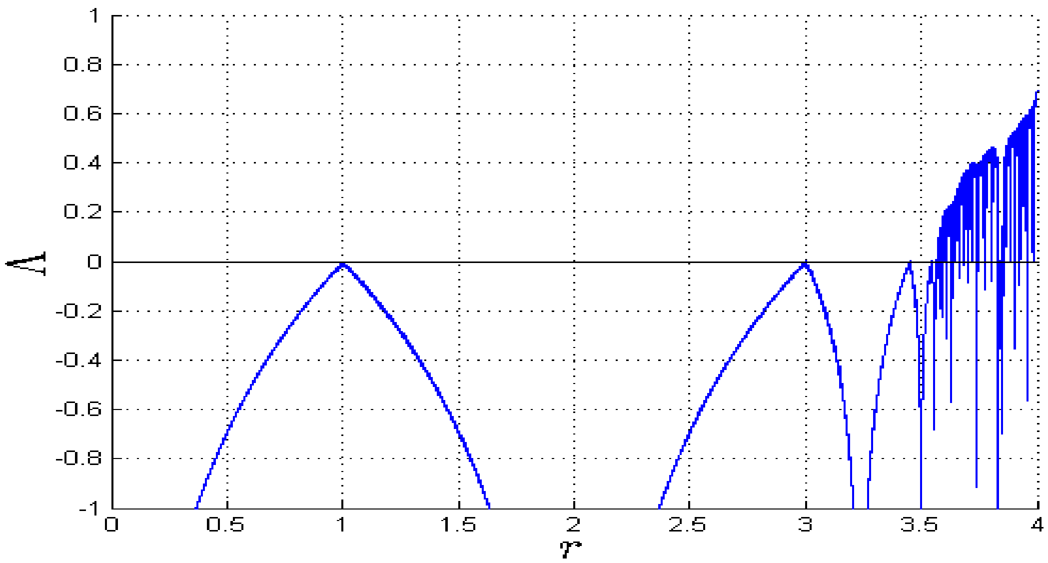

Рис. 3. Показатель Ляпунова в зависимости от управляющего параметра в логистическом отображении.

Обратим внимание, что показатель Ляпунова на Рис. 3 обращается в ноль при тех же самых значениях параметра r, что и точки бифуркации удвоения периода возникавшие на Рис. Это говорит о том, что при помощи зависимости показателя Ляпунова от управляющего параметра можно не только определять устойчивость системы, но и выявлять точки бифуркации.

Как оказалось, анализировать столь специфический класс динамических систем, поведение которых описывают одномерные отображения, даже для простых моделей не так-то просто. Однако интересно, что методы, применяемые здесь, оказываются полезными и при анализе явлений, возникающих в более сложных моделях. Для более основательного закрепления и усвоения материала, предлагается проанализировать поведение некоторых модельных систем. Во всех ниже приведенных системах нужно построить функцию отображения и лестницу Ламерея для различных значений управляющих параметров с выделением предельных циклов. Необходимо также построить бифуркационные диаграммы и графики зависимости показателя Ляпунова от управляющего параметра.

Список использованной литературы

1. Г. Шустер. Детерминированный хаос: Введение. – М.: Мир, 1988. – 253 с.
2. Ю.Н. Прошин, И.М. Еремин. Вычислительная физика. – Казань: КГУ, 2009. – 180 с.
3. Р.Г. Деминов, С.К. Сайкин, Ю.Н. Прошин. Вычислительные методы в теоретической физике. – Казань: КГУ, 2000. – 36 с.
4. А.Ю Лоскутов, А.К. Прохоров, С.Д. Рыбалко. Динамика неоднородных цепочек связанных квадратичных отображений. // ТМФ. 2002. – Т. 132. – С. 105-125.

5. R. Gilmore, M. Lefranc. The topology of chaos. Alice in Stretch and Squeezeland. – Wiley-VCH, 2002, – 551 p.